22/12/15

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $\mathbb{F}$ σώμα και V, W διαν. χώροι $/\mathbb{F}$. Μία συνάρτηση $f: V \to W$ λέγεται γραμμική αν:

i) $f(u+v) = f(u) + f(v)$ για κάθε $u, v \in V$

ii) $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$, $u \in V$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $f: V \to W$ γραμμική. Τότε:

i) $f(0_V) = 0_W$

ii) $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \dots + \lambda_k f(v_k)$ για κάθε $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ και $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$.

Απόδειξη

i) Αφού f γραμμική $f(0_V) = f(0_{\mathbb{F}} \cdot 0_V) \overset{f \text{ γραμμ.}}{=\!=\!=} 0_{\mathbb{F}} \cdot \underbrace{f(0_V)}_{\in W} = 0_W$

ii) Άλλη επαγωγή στο $\kappa \geq 2$. Για $\kappa=2$: $f(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2) \overset{\kappa=1}{=} f(\lambda_1 v_1)+f(\lambda_2 v_2) =$
$\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$. Άρα ισχύει για $\kappa=2$.
Η γενική περίπτωση της επαγωγής με τον ίδιο συλλογισμό.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</u>

1) Η $f: \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^1$ με $f((a,b)) = a+b-2$.
<u>ΛΥΣΗ</u> Η f δεν είναι γραμμική από την πρόταση, γιατί $0_{\mathbb{F}^2} = (0,0)$
$0_{\mathbb{F}^1} = 0_{\mathbb{F}}$, $f((0,0)) = -2 \neq 0_{\mathbb{F}^1}$

2) Η $f: \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ με $f((a,b)) = (a^2,0)$ δεν είναι γραμμική γιατί
$f((1,0)) = (1,0)$, και $f(2\cdot(1,0)) = f(2,0) = (4,0)$, ενώ
$2 \cdot f((1,0)) = 2\cdot(1,0) = (2,0)$

3) Έστω $T: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ με $T(f(x)) = f'(x)$.
<u>ΛΥΣΗ</u> Η T είναι γραμμική γιατί από Απειροστικό Ι $(f(x)+g(x))' =$
$= f'(x) + g'(x)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f(x))' = \lambda f'(x)$

4) Έστω $T: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ με $T(f(x)) = \int_0^1 f(x)dx$
<u>ΛΥΣΗ</u> Η T είναι γραμμική γιατί από Απειροστικό Ι
$\int_0^1 (f(x)+g(x))dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx$ και για $\lambda \in \mathbb{R}$
$\int_0^1 \lambda f(x)dx = \lambda \int_0^1 f(x)dx$

5) Έστω $\mathbb{F}$ σώμα, V δ.χ. $/\mathbb{F}$ και $id_V: V \to V$ η ταυτοτική απεικόνιση.
Η id_V είναι γραμμική, γιατί $id_V(u+v) = u+v = id_V(u) + id_V(v)$ και για
$\lambda \in \mathbb{R}$ $id_V(\lambda u) = \lambda u = \lambda \cdot id_V(u)$

6) Έστω $\mathbb{F}$ σώμα και V, W δ.χ. επί του $\mathbb{F}$. Ορίζουμε την μηδενική απεικόνιση
$f: V \to W$ με $f(u) = 0_W$ για κάθε $v \in V$. Η f είναι γραμμική γιατί
$u, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$ $f(u+v) = 0_W = 0_W + 0_W = f(u) + f(v)$
$f(\lambda u) = 0_W = \lambda \cdot 0_W = \lambda f(u)$

ανάστροφος του A

7) Έστω $V = \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$, $W = \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$ και $f: V \to W$ με $f(A) = A^t$

ΛΥΣΗ: Η f είναι γραμμική γιατί για $\lambda \in \mathbb{F}$, $A, B \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ έχουμε δει ότι $(A+B)^t = A^t + B^t$ και $(\lambda A)^t = \lambda A^t$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

Έστω $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \cdots & a_{\nu\nu} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Ορίζουμε ίχνος του A

$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{\nu\nu}$ δηλ. $\operatorname{Tr}(A)$ ορίζεται ΜΟΝΟ για τετραγωνικούς πίνακες και για A τετραγωνικό $\operatorname{Tr}(A)$ είναι το άθροισμα των στοιχείων της (κυρίας) διαγωνίου του A

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</u>

1) $\operatorname{Tr}\begin{pmatrix} 2015 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = 2015 + 1 = 2016$

2) Έστω $\mathbb{F}$ σώμα, $\nu \geq 1$ και $V = \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Τότε η απεικόνιση ίχνους $\operatorname{Tr}: \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \to \mathbb{F}^1$, $A \mapsto \operatorname{Tr}(A)$ είναι γραμμική. Πράγματι, έστω $A = [a_{ij}] \in V$, $B = [b_{ij}] \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Έχουμε $\operatorname{Tr}(A+B) =$
$= \operatorname{Tr}([a_{ij} + b_{ij}]) = \sum_{i=1}^{\nu} (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{\nu} a_{ii} + \sum_{i=1}^{\nu} b_{ii} = \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B)$
και $\operatorname{Tr}(\lambda A) = \operatorname{Tr}([\lambda a_{ij}]) = \sum_{i=1}^{\nu} (\lambda a_{ii}) = \lambda (\sum_{i=1}^{\nu} a_{ii}) = \lambda \operatorname{Tr}(A)$

3) Έστω $\nu \geq 2$, $V = \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, $f: V \to \mathbb{F}^1$ με $f(A) = \det(A)$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: Η f δεν είναι γραμμική.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Θα βρούμε $A, B \in \mathbb{F}$ με $\det(A+B) \neq \det A + \det B$

Πράγματι, έστω $A = \begin{bmatrix} 1_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1_0 \end{bmatrix}$ δηλ. ο A έχει (i,i) συντεταγμένη 1 για $1 \leq i \leq \nu-1$ και 0 παντού και

$B = \begin{bmatrix} 0_0 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 0_1 \end{bmatrix}$ δηλ. ο B έχει (ν,ν)-συντεταγμένη 1 και 0 παντού αλλού.

Έχουμε φανερά $A + B = I_\nu$. Επίσης A, B διαγώνιοι. Άρα
$\det A =$ γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου του $A = 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot 0 = 0$

Ομοίως, $\det B = 0_{\mathbb{F}}$. Αλλά $\det I_\nu = 1_{\mathbb{F}}$. Άρα $\det(A+B) \neq \det A + \det B$.
Άρα det όχι γραμμική απεικόνιση.

4) Έστω $\mathbb{R}^2$ με τη συνήθη απόσταση $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, δηλ.
$d((a,b),(c,d)) = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$.

Θα δείτε (μάλλον) στην Αναλυτική Γεωμετρία το εξής:
Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τις ιδιότητες:
i) $d(f(a,b), f(c,d)) = d((a,b),(c,d))$ για κάθε $(a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2$,
δηλ. f ισομετρία
(δηλ. πχ αν δύο σημεία στο $\mathbb{R}^2$ έχουν απόσταση πχ 5, τότε και οι εικόνες τους μέσω της f έχουν απόσταση 5)
ii) $f((0,0)) = (0,0)$
Τότε (ΠΡΟΤΑΣΗ στην Αναλ. Γεωμ.) f γραμμική.

(Το ίδιο ισχύει στο $\mathbb{R}^n$, για κάθε $n \geq 2$, με τη μετρική
$d((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$)

5) Από τα επόμενα θα προκύψει το εξής:
Έστω $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 3}$. (1) Τότε:
Η απεικόνιση $f: \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^2$ με $f((x_1,x_2,x_3)) =$
$= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)$ (2)
είναι γραμμική. Αντίστροφα, αν $f: \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^2$ γραμμική τότε υπάρχει μοναδικός $A \in \mathbb{F}^{2\times 3}$ όπως στην (1) ώστε η f να δίνεται από την (2).
Γενικά, θα δούμε ότι το αντίστοιχο ισχύει και για γραμμικές απεικονίσεις $f: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$, δηλ. ότι προσδιορίζονται αντίστοιχα από την (2) από μοναδικό πίνακα $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$

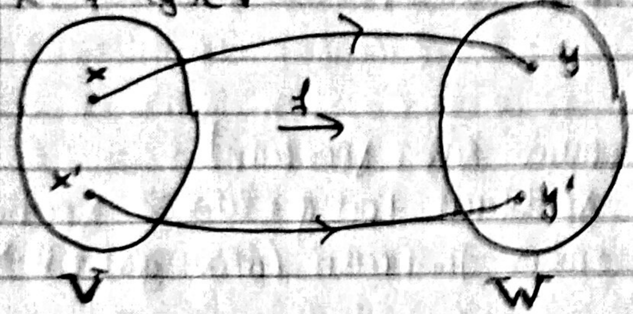
<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>

Έστω $\mathbb{F}$ σώμα, V, W δ.χ. /$\mathbb{F}$ και $f: V \to W$ γραμμική απεικόνιση. Υποθέτουμε, f 1-1 και επί. Τότε από Θεωρία Συνόλων ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: W \to V$. Τότε η f^{-1} είναι γραμμική.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $y, y' \in W$ και $\lambda \in \mathbb{F}$. Ο.δ.ο. $f^{-1}(y+y') = f^{-1}(y) + f^{-1}(y')$ και $f^{-1}(\lambda y) = \lambda f^{-1}(y)$. Θέτουμε $x = f^{-1}(y) \in V$, $x' = f^{-1}(y') \in V$

Παρατήρηση: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε 1-1 και επί. Είναι η f^{-1} πάντα γραμμική; $f(x) = x^3 \to$ όχι



Άρα $f(x) = y$ (1) και $f(x') = y'$ (2). Αφού f γραμμική, $f(x+x') = f(x) + f(x') \xlongequal{(1) \text{ και } (2)} y + y'$ (3). Η (3) δίνει $f^{-1}(y+y') = x + x' = f^{-1}(y) + f^{-1}(y')$ (από τον ορισμό των x, x')

Αφού f γραμμική, $f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda y$ (4)

Η (4) δίνει $f^{-1}(\lambda y) = \lambda x = \lambda f^{-1}(y)$ (από τον ορισμό του x)

<u>Συμπέρασμα</u>: f^{-1} γραμμική

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

Έστω $\mathbb{F}$ σώμα, V, W δ.χ. /$\mathbb{F}$. Μια γραμμική απεικόνιση λέγεται ισομορφισμός αν η f είναι 1-1 και επί. (Σ' αυτή την περίπτωση η f^{-1} είναι επίσης γραμμική από την πρόταση (πάνω)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω F σώμα, V, W δ.χ. /F. Οι V, W λέγονται ισόμορφοι (δ.χ. /F) αν υπάρχει $f: V \to W$ ισομορφισμός, (δηλ. f γραμμική, 1-1 και επί)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Θα δούμε ότι αν V, W πεπερασμένης διάστασης τότε V, W ισόμορφοι ανν $\dim V = \dim W$

ΠΡΟΤΑΣΗ (Η σύνθεση γραμμικών είναι γραμμική)

Έστω F σώμα, $f: V \to W$ γραμμική και $g: W \to Z$ γραμμική. Τότε η σύνθεση $g \circ f$ είναι επίσης γραμμική (όπου $g \circ f: V \to Z$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $u, v \in V$ και $\lambda \in F$. Έχουμε:

$(g \circ f)(u+v) = g(f(u+v)) \overset{f \text{ γραμ}}{=\!=} g(f(u)+f(v)) \overset{g \text{ γραμ}}{=\!=} g(f(u)) + g(f(v))$
$= g \circ f(u) + g \circ f(v)$

Επίσης $g \circ f(\lambda u) = g(f(\lambda u)) \overset{f \text{ γραμ}}{=\!=} g(\lambda f(u)) \overset{g \text{ γραμ}}{=\!=} \lambda g(f(u)) =$
$= \lambda (g \circ f(u))$. Άρα $g \circ f$ γραμμική.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω V, W, Z δ.χ. επί του σώματος F. Τότε:

i) Ο V είναι ισόμορφος με τον V

ii) Αν ο V είναι ισόμορφος με τον W, τότε και ο W είναι ισόμορφος με τον V

iii) Αν ο V είναι ισόμορφος με τον W και ο W είναι ισόμορφος με τον Z, τότε ο V είναι ισόμορφος με τον Z

(Δηλ. η "ισομορφία" διαν. χ. /F) είναι "σχεδόν ισοδυναμίας")

Απόδειξη

i) Όπως είδαμε η $id_V : V \to V$ είναι γραμμική. Προφανώς είναι 1-1 και επί. Άρα $id_V : V \to V$ ισομορφισμός.

ii) Έστω $f : V \to W$ ισομορφισμός. Είδαμε ότι η $f^{-1} : W \to V$ είναι γραμμική. Άρα αφού f^{-1} 1-1 και επί (γιατί η f έχει τις ίδιες ιδιότητες) $\Rightarrow$ f^{-1} ισομορφισμός.

iii) Έστω $f : V \to W$ ισομορφ. και $g : W \to Z$ ισομορφ. Θέτουμε $h = g \circ f : V \to W$. Είδαμε h γραμμική. Αφού f 1-1, g 1-1 $\Rightarrow$ $h = g \circ f$ 1-1 και f επί, g επί $\Rightarrow$ $h = g \circ f$ επί.
Άρα h ισομορφισμός.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω V, W δ.χ. $/\mathbb{F}$, $f : V \to W$ γραμμική και $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ με $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$. Τότε η f καθορίζεται μονοσήμαντα από τα $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$. (δηλ. αν επίσης $g : V \to W$ γραμ. με $g(v_i) = f(v_i)$ για κάθε $i = 1, 2, \dots n$ τότε $f = g$ σαν συναρτήσεις από το V στο W.)

Απόδειξη

ΝΔΟ $f = g$ σαν συναρτήσεις από το V στο W. Έστω $v \in V$.
Άρα $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ με
$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$. Άρα αφού f και g γραμμικές

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) \overset{f \text{ γραμ}}{=\!=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i) \overset{\text{υπο}}{=\!=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(v_i) \overset{g \text{ γραμ}}{=\!=}$$

$$= g\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = g(v)$$

(Με άλλα λόγια αν $f : V \to W$ γραμμική και $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$, αν ξέρουμε στοιχεία $f(v_1), \dots, f(v_n)$ του W, μπορούμε να υπολογίσουμε το $f(v)$ για κάθε $v \in V$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω V, W δχ επί του F, $e_1, e_2, \dots, e_n$ βάση του V και $w_1, w_2, \dots, w_n \in W$. Τότε υπάρχει μοναδική $f: V \to W$ γραμμική με την ιδιότητα $f(e_i) = w_i$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$.

Απόδειξη

Μοναδικότητα f: Αφού $e_1, \dots, e_n$ βάση του $V \to V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$. Άρα η μοναδικότητα έπεται από την προηγούμενη πρόταση.

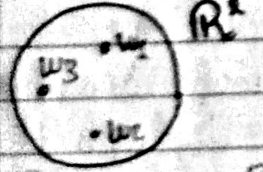
Ύπαρξη f: Έστω $v \in V$. Αφού $e_1, \dots, e_n$ βάση του V υπάρχουν μοναδικά $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ ώστε $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ (1). Ορίζω $f(v) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_n w_n \in W$. Έτσι έχω ορίσει συνάρτηση $f: V \to W$.
Φανερά $f(e_i) = w_i$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ γιατί η γραφή της μορφής (1) του e_i σαν γραμμικός συνδυασμός των $e_1, \dots, e_n$ έχει

$$\lambda_j = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Εύκολα βλέπουμε επίσης ότι f γραμμική.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $V = \mathbb{R}_2[x]$ με βάση $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2$, $W = \mathbb{R}^2$ και $w_1 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $w_2 = (c, d) \in \mathbb{R}^2$ και $w_3 = (k, \ell) \in \mathbb{R}^2$.



Η Πρόταση μας λέει ότι υπάρχει μοναδική συνάρτηση $f: V \to \mathbb{R}^2$ με $f(e_1) = w_1$, $f(e_2) = w_2$, $f(e_3) = w_3$.

Ερώτηση: Ποιος είναι ο τύπος της f;

Απάντηση: Έστω $v = \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ με $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Από τη γραμμικότητα της f έχουμε $f(v) = f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3) =$

$= \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \lambda_3 f(e_3) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 =$

$= (\lambda_1 a + \lambda_2 c + \lambda_3 k, \lambda_1 b + \lambda_2 d + \lambda_3 \ell)$